



TITLE:

コロナ定理 (Fourier解析の複素解析的方法の復権をめざして)

AUTHOR(S):

藪田, 公三

CITATION:

藪田, 公三. コロナ定理 (Fourier解析の複素解析的方法の復権をめざして). 数理解析研究所講究録 1982, 451: 182-186

ISSUE DATE:

1982-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102957>

RIGHT:

コロナ定理

茨城大理 藪田公三

複素平面上の単位円板 U に対して, U 上の正則有界函数 f の全体は, ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{z \in U} |f(z)|$ を入れると, 1 を持った可換 Banach algebra $H^\infty(U)$ になる。このとき, U 内の各点 z は, 対応: $f \rightarrow f(z)$ が $H^\infty(U)$ 上の連続乗法的線形汎函数になることにより, $H^\infty(U)$ の maximal ideal space \mathcal{M} 上の点と同一視できる。 \mathcal{M} には weak* 位相 $(\sigma(H^\infty(U)', H^\infty(U)))$ が入っているとする。 \mathcal{M} はコンパクトである。さて, " U が \mathcal{M} で dense か" というのが 1941 年 角谷により, 提出された問題で, 形から コロナ問題と呼ばれた。この問題は, 容易に解けるように, 次の同値である。

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1, f_2, \dots, f_n \in H^\infty(U) \text{ で } \inf_{z \in U} \{ |f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \} > 0 \text{ なら} \\ f_1(z)g_1(z) + \dots + f_n(z)g_n(z) = 1 \\ \text{となる } g_1, g_2, \dots, g_n \in H^\infty(U) \text{ が存在する。} \end{array} \right.$$

1962 年, この問題は, L. Carleson により, 次の, より強い形で肯定的に解かれた (BPT, コロナは存在しない)。

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}, 1 > \delta > 0 \text{ が与えられると, 次のような正数 } C(k, \delta) \\ \text{が存在する。} \end{array} \right.$$

$f_1, \dots, f_k \in H^\infty(U)$, $\|f_j\|_\infty \leq 1$, $|f_1(z)| + \dots + |f_k(z)| > \delta$ ($z \in U$)

ならば,

$$f_1(z)g_1(z) + \dots + f_k(z)g_k(z) = 1$$

かつ $\|g_j\|_\infty \leq C(k, \delta)$, $j=1, \dots, k$

となる $g_j \in H^\infty(U)$ が存在する。

この証明は後に L. Hörmander により少し見通しよくされた。

又, 1979年 T. Wolff が比較的簡単な別証を与えた。最近, 内山明人氏がこの二つの証明をひきいて, 可算個の f_j についてもこの定理が成立することを示した。その中で, 上の $C(k, \delta)$ が k に無関係にとれることを示している。ここでは以下で Carleson-Hörmander 及び Wolff の証明の大筋を説明することとする。まず

I. f_j が \overline{U} の近傍で正則なことを仮定してよいこと。

$$f_{p,j}(z) \equiv f_j(p(z)) \quad 0 < p < 1$$

とおけば, $f_{p,j}$ は $|z| < \frac{1}{p}$ で正則で定理の仮定も満たす。よって, この定理が成立する(2),

$\exists g_{p,j} \in H^\infty(U)$ s.t.

$$\sum_{j=1}^k f_{p,j} g_{p,j} = 1, \quad \|g_{p,j}\|_\infty \leq C(\delta, k).$$

そして, $p_n \uparrow 1$ となる部分列で, $g_{p_n,j} \rightarrow g_j(z)$ となるものが正則性の議論によりとれる。このとき,

$$g_j \in H^\infty(U), \quad \sum f_j(z)g_j(z) = 1, \quad \|g_j\|_\infty \leq C(\delta, k) \quad \text{である。}$$

II. 適当な 1 の分解.

$\frac{\delta}{h} > \varepsilon$ と仮定して ε に対して

$V_j = \{z \in U; |f_j(z)| > \varepsilon\}$ と U の V_1, V_2, \dots, V_n の族
 に対する 1 の分解: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ を

Carleson-Hörmander の

$$\delta(\nabla \varphi_j dx dy) \leq C(h, \delta)$$

Wolff の τ は
$$h_{jn} = \frac{\varphi_n \bar{\partial} \varphi_j}{f_n f_j} \quad \text{と} \quad \dots \quad \tau \text{ と} \quad \dots$$

$$\delta(|h_{n,j}(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy) \leq C(h, \delta) \quad 1 \leq n, j \leq h$$

$$\delta(|\partial h_{n,j}(z)| \log \frac{1}{|z|} dx dy) \leq C(h, \delta) \quad 1 \leq n, j \leq h$$

と仮定する。このとき

$$\delta(\mu) = \sup_{\substack{0 < \theta < \pi \\ 0 \leq a < 2\pi \\ 1 - \frac{h}{\pi} < r < 1}} \frac{1}{2h} \int_{a-\theta < \phi < a+\theta} |d\mu(r, \phi)|$$

III. $\bar{\partial}$ equation を解くこと。

II より $\sum f_j \frac{\varphi_j}{f_j} = 1$ とあるから $\frac{\varphi_j}{f_j}$ を π_j と記し π_j と π_j と π_j

と

$$g_j(z) = \frac{\varphi_j}{f_j} + \sum_{n=1}^h (a_{jn}(z) - a_{nj}(z)) f_n(z)$$

の π_j に対して見付け出す。このとき $\sum g_j f_j = 1$ と仮定する。

このためには, Carleson-Hörmander の

$$\textcircled{1} \quad \bar{\partial} a_{jn} = \frac{\bar{f}_j \bar{\partial} \varphi_n}{f_n \sum |f_\ell|^2},$$

Wolff には

$$\textcircled{1} \quad \bar{\partial} a_{j,n} = \frac{g_n \bar{\partial} p_j}{f_n f_j}$$

をもっとと解けばよい。

実際 II のように $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ に対しては、いずれの場合も、

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |a_{j,n}(re^{i\theta})| d\theta < +\infty \text{ かつ } \|a_{j,n}\|_\infty \leq C(n, \delta)$$

をみたすように解ける。そして、 g_j は Hardy 空間 $H^1(U)$

に属し、境界値は有界函数であるから、Hardy 空間の一般論から

$$g_j \in H^0(U) \text{ かつ } \|g_j\|_\infty \leq C'(n, \delta)$$

となり、証明が終了。□

最後に、Wolff の精しい証明は Koosis [7] の Appendix にある。

又 Gamelin [3] は Wolff の証明をさらに巧みに H^p theory と Green の公式だけを用いて改良している。そこにはもっと一般の領域の場合どうなるかの簡単な解説もある。

このように Wolff の方法で Riesz 定理の証明は簡単になるとはいえず、内山 [8] の結果から見ると、 $C(h, \delta)$ の評価をよくなるには、Carleson-Hörmander の方法の方がよいとある。

Vanopoullos [6] では C^n ($n \geq 2$) の単位球、あるいは強擬凸領域で、Carleson-Hörmander の方法でどこまで attack できるか試みているが不成功である。

参考文献

1. L. Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona theorem, Ann. of Math. 76 (1962), 547-559.
2. L. Carleson, The corona theorem, Lecture Notes in Math. 118 (1968), 121-132.
3. T.W. Gamelin, Wolff's proof of the corona theorem, Israel J. Math. 37 (1980), 113-119.
4. L. Hörmander, Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 943-949.
5. L. Hörmander, L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions, Math. Scand. 20 (1967), 65-78.
6. N. Varopoulos, BMO functions and the $\bar{\partial}$ -equation, Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273.
7. P. Koosis, Introduction to H^p spaces, Lec. Notes Ser. 40, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press, 1980.
8. A. Uchiyama, Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions, to appear.